

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА С ХАОТИЧЕСКИМИ РЕЖИМАМИ

© 2012 г. В.И. Швейкина¹, И.А. Кожевникова²

¹Институт водных проблем Российской академии наук, Москва

²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва

Ключевые слова: влагозапасы, испарение, речной сток, нелинейная модель, управляющий параметр, автоколебания, хаотические режимы.



В.И. Швейкина



И.А. Кожевникова

В работе показано, как при использовании только двух переменных (влагозапасы, сток) и уравнений самой простой формы в системе возникают потеря устойчивости и рождение предельного цикла. При воздействии на систему внешней силы и определенном интервале значений управляющего параметра, в качестве которого выбрана скорость испарения, в системе установлены хаотические режимы. Возможность возникновения подобных режимов в колебаниях некоторых конкретных рек подтверждена рассчитанными для них значениями диагностических характеристик хаоса.

Введение

Исследования колебаний уровня Каспийского моря, оценка плотности вероятностей которых оказалась полимодальной [1, 2], привели к постановке задач, касающихся структуры колебаний речного стока. В частности, были исследованы колебания суммарного стока рек, впадающих в Каспий-

ское море, т. к. процессы, происходящие в бассейне водосбора, оказывают определяющее значение для колебаний уровня моря.

Воплощая в жизнь идеи Г.П. Калинина, И.А. Картвелишвили и многих других известных гидрологов, в работе [3] была предложена модель речного стока, в основе которой лежала нелинейная связь между речным стоком и влагозапасами почвы. Модель выявляла такие закономерности стока, которые были общими для различных рек в крупномасштабной шкале времени. Эта простая физическая модель, состоящая из двух дифференциальных уравнений, математически была идентична экологической модели В. Вольтерра (1926 г.), описывающей ситуацию «хищник–жертва» в Адриатическом море для двух видов рыб. Позднее, в 1956 г. А.Ж. Лотка модифицировал эту модель, и она появилась в виде системы, решения которой представляли собой незатухающие временные колебания. Модель Лотки–Вольтерра указывала на некоторые важные принципы и требования, выполнение которых необходимо для существования реальных колебательных явлений. Скрупулезный теоретический анализ теплофизических механизмов как в толще воды замкнутых водоемов, так и в системе «атмосфера–суша» для поверхности речных водосборов, выполненный В.И. Найденовым [4, 5], обнаружил наличие необходимых условий для возникновения автоколебаний (самоподдерживающихся колебаний) в речном стоке. Такие решения были получены в [3], значимым итогом работы явилось раскрытие механизма возникновения водных циклов. До этого многие исследователи обнаруживали циклические колебания с различными периодами при анализе рядов стока конкретных рек, но механизм их возникновения был неясен.

Помимо циклов в колебаниях речного стока могут возникать и более сложные режимы. Представленная статья посвящена дальнейшему исследованию системы двух дифференциальных уравнений первого порядка [3], описывающей колебания речного стока.

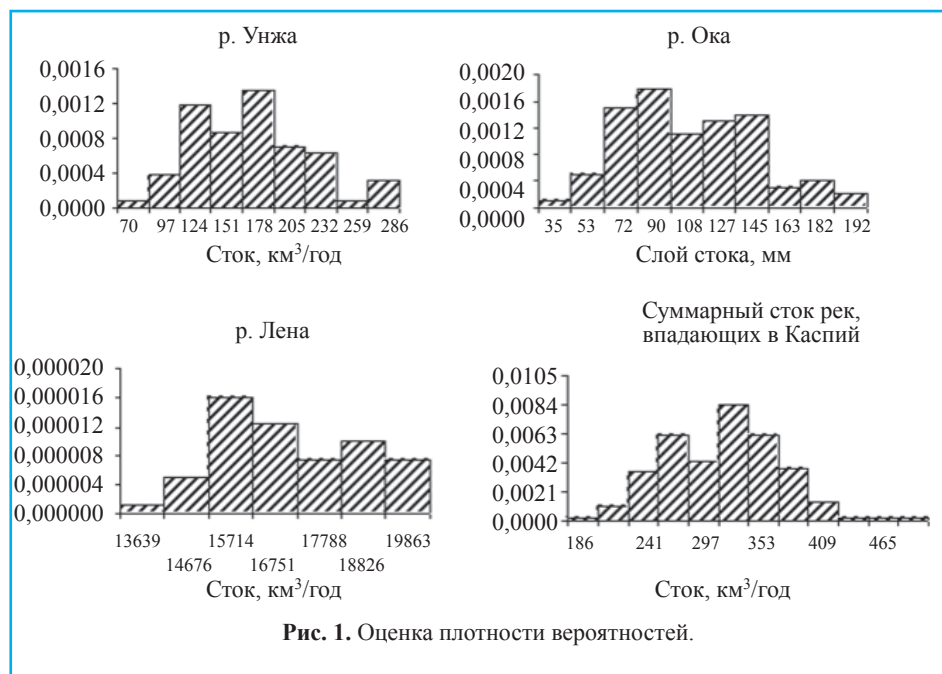
Постановка задачи

В последние десятилетия внимание исследователей сосредоточилось на изучении детерминированного хаоса, который может возникать в простых системах, описываемых динамическими законами. В литературе термин «хаотический» применяется к движениям, описываемым детерминированной системой некоторых уравнений, решение которых обнаруживает сильную зависимость от начальных условий и где отсутствуют случайные или непредсказуемые силы или параметры [6]. В хаотических системах невозможно предсказание, однако в них присутствует некоторый порядок, например, ограниченность области фазового пространства (пространство динамической системы, представляющее множество всех ее возможных

состояний). Хаотическая динамика системы развивается в рамках определенной структуры, которую трудно обнаружить с помощью обычных методов изучения динамики. Обнаружив хаотические колебания в нелинейной детерминированной системе низкого порядка, мы получаем возможность найти источник таких колебаний и способ управлять им.

Целью представленной работы является обнаружение хаотических режимов в колебаниях речного стока рек средней полосы северного полушария и построение модели, адекватно отражающей основные особенности колебаний речного стока.

Исследование структуры колебаний некоторых рек Восточно-Европейской равнины и Западной Сибири с помощью оценки плотности вероятностей (гистограммы) показало, что в колебаниях этих рек имеются две моды, около которых концентрируются все остальные значения. На рис. 1 приведены оценки плотностей вероятностей для рек Унжа, Ока, Лена и суммарного стока рек, впадающих в Каспийское море. Построение гистограмм предполагает группирование данных, что приводит к некоторой потере информации. Построение траектории колебаний стока в фазовой плоскости (фазового портрета), для которой можно использовать ряд наблюдений, лишено этого недостатка. На рис. 2 представлены фазовые портреты указанных рек, при этом по оси x отложены значения стока в предыдущем году, а по оси y – в текущем году. Для построения фазовых портретов рассмотренных



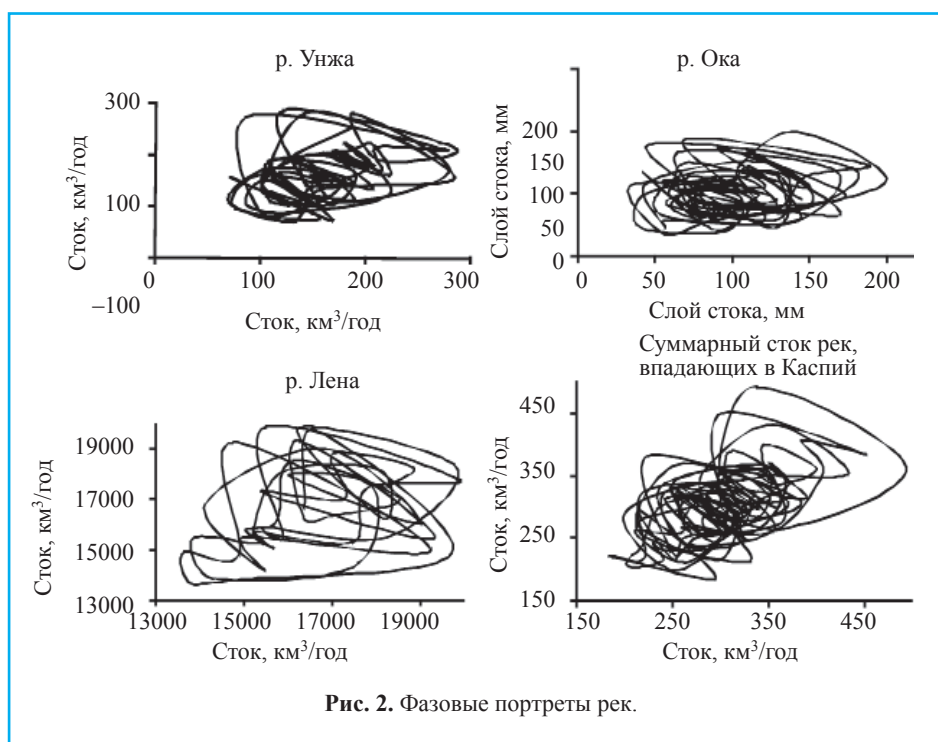


Рис. 2. Фазовые портреты рек.

рек использовались следующие соответствующие количества значений: 70, 85, 48 и 132.

Оба метода являются качественными и часто используются для иллюстрации какого-либо свойства рассматриваемых рядов, в частности, наличия двух состояний равновесия. Существование нескольких устойчивых состояний в колебаниях стока является предпосылкой возникновения в них регулярных и нерегулярных переходов от одного устойчивого состояния к другому, т. е. динамического хаоса. Диагностической характеристикой хаоса является, например, корреляционная размерность. Воспользуемся этой оценкой, чтобы показать хаотичность траекторий рассматриваемых рядов. Формулы для определения корреляционной размерности вынесены в приложение к статье.

Очевидно, что в соответствии с этим определением корреляционная размерность при $m > 1$ для любой периодической функции равна единице, а для произвольной однозначной непериодической и детерминированной функции близка к нулю. Для рядов белого шума значения корреляционной размерности почти не зависят от длины выборки, при ее изменении более чем в четыре раза значение корреляционной размерности практически не изменилось (табл. 1).

Таблица 1. Значения корреляционной размерности для ряда белого шума и для $j = 20$

Белый шум		m		
		3	4	5
Длина ряда N	1212	2,834	3,785	4,544
	5300	2,882	3,787	4,879

Многими исследователями было проверено (в т. ч. такая проверка приведена в [7]), что если траектория колебания соответствует белому шуму, то величина корреляционной размерности следует значению длины цепочки при ее увеличении, т. е. при $m = 5$ ее значения близки к 5. В работе [6] приведены теоретические значения корреляционной размерности для таких систем с хаотическими режимами, как система Лоренца и потенциала с двумя ямами. Эти значения равны 2,04 и 2,14 соответственно. Для траекторий рек Унжы, Оки, Лены и суммарного стока рек, впадающих в Каспий, получены значения корреляционных размерностей: 3,361; 2,54; 2,58 и 1,51 соответственно. Эти значения, возможно, указывают на хаотический характер траекторий рассмотренных рек.

Еще одной диагностической характеристикой хаоса является информационная размерность. Для вычисления информационной размерности (формулы приведены в приложении) необходимо найти число точек n_i в каждой из m ячеек покрытия и оценить вероятность попадания точки в i -ю ячейку.

Чтобы интерпретировать результаты для наблюдаемых гидрологических рядов, подсчитаем информационные размерности и энтропии Колмогорова для логистического отображения, являющегося хаотическим, и для выборки белого шума (табл. 2). Эти значения показывают, что информационная размерность и энтропия мало меняются при изменении длины выборки от 100 до 5300. Этот факт позволяет провести анализ информационной размерности и энтропии для небольших выборок колебаний стока для рассматриваемых рек (Унжа, Ока, Лена и суммарный сток рек в Каспийское море). Значения информационной размерности равны соответственно: 0,821; 0,850; 0,689 и 0,867; информационной энтропии – 3,213; 3,326; 2,693 и 3,393.

Таблица 2. Информационные размерности и энтропии для выборок разной длины n при $m = 100$

Хаотическая характеристика	Логистическое отображение			Белый шум		
	$n = 5300$	$n = 1212$	$n = 100$	$n = 5300$	$n = 1212$	$n = 100$
Информационная размерность	0,953	0,952	0,839	0,998	0,991	0,968
Энтропия	4,386	4,384	3,901	4,595	4,566	4,256

Кроме этого, полученные значения информационной размерности и энтропии для трех типов рядов: белого шума, типично хаотического и наблюдаемого ряда гидрологических данных, свидетельствуют, что возможности прогноза этих рядов почти одинаковы, их невозможно прогнозировать на длительные интервалы времени. Для хаотических рядов это связано с экспоненциальной расходимостью траекторий и сильной зависимостью от начальных условий. Таким образом, используя качественные оценки детерминированного хаоса, мы получили основания считать, что формирование речного стока является процессом, которому свойственно иметь хаотические режимы.

Построим детерминированную систему уравнений, переменными которой являются речной сток и влагозапасы суши, и исследуем ее на наличие хаотических режимов.

Нелинейная модель колебаний речного стока

Впервые простая физическая модель процесса многолетних колебаний средних годовых величин стока и влагозапасов речного бассейна была предложена в работе [3]. Для ее построения были использованы два общих закона природы: закон сохранения вещества и закон сохранения импульса движения. Первый выражался уравнением водного баланса относительно двух переменных: влагозапасов W и речного стока Q , второй – уравнением движения стока:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= P - E(W) - Q; \\ \frac{dQ}{dt} &= G - \frac{Q}{K(W)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где P – осадки;

$E(W)$ – испарение;

G – силы тяжести, действующие на массы воды в бассейне;

$1/K(W)$ – коэффициент сопротивления бассейна движению воды в замыкающий створ бассейна. Этот коэффициент тесно связан с гидрогеологическими особенностями строения бассейна.

Решение системы (1) в виде автоколебаний было получено в работе [3] при жестких ограничениях на вид функций $E(W)$ и $K(W)$.

Рассмотрим более общие условия возникновения автоколебаний в системе (1). Стационарная точка (W_s, Q_s) системы (1), определяется условиями:

$$dW/dt = 0, \quad dQ/dt = 0.$$

В окрестности этой точки разложим правую часть первого уравнения системы в ряд Тейлора с точностью до 3-го порядка. Учитывая, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{dW}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}} = -E'(W) = a_{10}; \quad \left. \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{dW}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}} = -1 = a_{01};$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial W^2} \left(\frac{dW}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}} = -\frac{E''(W)}{2} = a_{20}; \quad \left. \frac{\partial^3}{\partial W^3} \left(\frac{dW}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}} = -\frac{E'''(W)}{6} = a_{30}.$$

Так как первая частная производная по стоку $\left. \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{dW}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}}$ является постоянной, то все последующие частные производные по стоку более высокого порядка равны нулю.

Получим разложение для изменения влагозапасов, если введем обозначения:

$$W - W_s = \tilde{W}, \quad Q - Q_s = \tilde{Q},$$

$$\frac{dW}{dt} = a_{10}\tilde{W} + a_{01}\tilde{Q} + a_{20}\tilde{W}^2 + a_{30}\tilde{W}^3.$$

Аналогично для второго уравнения, учитывая, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial W} \left(\frac{dQ}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}} = G'(W_s) + \frac{QK'(W_s)}{K^2(W_s)} = b_{10};$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial W^2} \left(\frac{dQ}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}} &= \\ &= \frac{1}{2} \left(G''(W_s) + Q(W_s) \frac{K''(W_s)}{K(W_s)} - 2Q(W_s) \frac{K'(W_s)}{K^3(W_s)} \right) = b_{20}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^3}{\partial W^3} \left(\frac{dQ}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}} &= \\ &= \frac{1}{6} \left(G'''(W_s) + Q(W_s) \left[\frac{K'''(W_s)}{K^2(W_s)} - 6 \frac{K'(W_s)K''(W_s)}{K^3(W_s)} + 6 \frac{K'^3(W_s)}{K^4(W_s)} \right] \right) = b_{30}; \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{dQ}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}} = -\frac{1}{K(W_s)} = b_{01};$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial Q^2} \left(\frac{dQ}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}} = 0; \quad \left. \frac{\partial^3}{\partial Q^3} \left(\frac{dQ}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial W \partial Q} \left(\frac{dQ}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}} = \frac{K'(W_s)}{2K^2(W_s)} = b_{11};$$

$$\left. \frac{\partial^3}{\partial W \partial Q^2} \left(\frac{dQ}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial^3}{\partial W^2 \partial Q} \left(\frac{dQ}{dt} \right) \right|_{\substack{W=W_s \\ Q=Q_s}} = \frac{K''(W_s)}{6K^2(W_s)} - \frac{K'^2(W_s)}{3K^3(W_s)} = b_{21},$$

получим

$$\frac{d\tilde{Q}}{dt} = b_{10}\tilde{W} + b_{01}\tilde{Q} + b_{20}\tilde{W}^2 + b_{30}\tilde{W}^3 + b_{11}\tilde{W}\tilde{Q} + b_{21}\tilde{W}^2\tilde{Q}.$$

Система (1) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{W}}{dt} = a_{10}\tilde{W} + a_{01}\tilde{Q} + a_{20}\tilde{W}^2 + a_{30}\tilde{W}^3; \\ \frac{d\tilde{Q}}{dt} = b_{10}\tilde{W} + b_{01}\tilde{Q} + b_{20}\tilde{W}^2 + b_{30}\tilde{W}^3 + b_{11}\tilde{W}\tilde{Q} + b_{21}\tilde{W}^2\tilde{Q}. \end{cases} \quad (2)$$

В первом уравнении системы (2) существенную роль играет испарение, нелинейно зависящее от влагозапасов почвы. Такой характер изменения испарения обнаружен В.И. Найденовым на основе решения задачи по определению годового хода температуры поверхности хорошо увлажненной суши с учетом годового хода радиационного баланса и затрат солнечного тепла на испарение и теплообмен между поверхностью суши и атмосферой [5]. Принималась нелинейная зависимость коэффициентов теплопроводности и температуропроводности от влагозапасов почв и грунтов. В результате учета этих теплофизических факторов был рассчитан внутригодовой ход температуры для поверхности суши. Показан механизм влияния влагозапасов на скорость испарения, связанный с существенной разностью в теплофизических свойствах воды и сухих компонентов почво-грунтов.

Во втором уравнении системы (2) некоторые величины, например, $G'(W_s)$ и $1/K(W_s)$ (соответственно b_{10} и b_{01}), могут быть приближенно оценены через среднее многолетнее значение речного стока и коэффициент корреляции между смежными значениями стока. Именно вариациями коэффициентов сопротивления и испарения (для разных бассейнов эти величины могут отличаться на порядок) объясняется большой разброс коэффициента автокорреляции речного стока по регионам.

Учет нелинейной зависимости испаряемости и, следовательно, испарения от влагозапасов суши приводит к тому, что система уравнений водного баланса и баланса количества движения воды в речном бассейне оказывается существенно нелинейной и неустойчивой. Многочисленные положительные и отрицательные обратные связи, действующие в системе «речной бассейн – атмосфера», могут порождать упорядоченные структуры, т. е. при определенных условиях система может стремиться к самоорганизации. Потеря системой устойчивости и возникновение на этой основе автоколебаний является одним из примеров возникновения в системе упорядоченной структуры. Такие колебания обусловлены не внешним воздействием, а внутренней структурой самой системы.

Под самоорганизацией понимается процесс установления в системе порядка, происходящего исключительно за счет совместного действия и взаимосвязей ее компонентов. В системе при установлении порядка все элементы взаимосвязаны и каждый несет информацию обо всех. Фактически, самоорганизация представляет собой установление организованности, устойчивого движения, порядка за счет согласованного взаимодействия компонентов внутри системы при отсутствии упорядочивающих воздействий со стороны среды. В открытых системах под воздействием внешней среды могут возникать внутренние флуктуации как самой системы, так и ее компонентов. Флуктуации могут быть свободными, вынужденными и автоколебаниями. К свободным обычно относят постепенно затухающие флуктуации. Автоколебания – незатухающие, самоподдерживающиеся колебания, происходящие в диссипативных открытых, далеких от равновесия системах, т. е. системах, определяющихся параметрами, свойствами и природой самой системы. Точки бифуркации в таких системах часто провоцируются изменением управляющего параметра или управляющей подсистемы. В рассматриваемой системе (2) в качестве управляющего параметра может быть рассмотрена скорость испарения (коэффициент a_{10}), изменение которой приводит к качественно новому движению всей системы.

Тепловая неустойчивость испарения может быть обусловлена, в частности, большой разницей в теплофизических свойствах сухих компонентов почвы и воды. Теплоемкость сухих пористых грунтов более чем в 5 раз меньше теплоемкости воды, поэтому влажный слой почвы медленно нагре-

вается и медленно остывает. При этом, чем больше увлажнена почва, тем меньше амплитуда колебаний температуры воздуха, что ведет к меньшему испарению и увеличению запасов влаги в почве. Такая положительная обратная связь делает возможным в далеких от равновесия состояниях усиление очень слабых возмущений до крупномасштабных. При положительной обратной связи система получает определенную энергию. Если эта энергия больше энергии потерь, то амплитуда малых вначале колебаний нарастает. При нарастании амплитуд колебаний энергия, поступающая извне, уменьшается и при некоторой амплитуде колебаний становится равной энергии потерь. В результате устанавливается режим стационарных автоколебаний, при котором внешний источник компенсирует все потери энергии. Таким образом, автоколебательные системы должны быть принципиально нелинейными – именно нелинейность не позволяет колебаниям безгранично нарастать, управляя поступлением и тратами энергии источника.

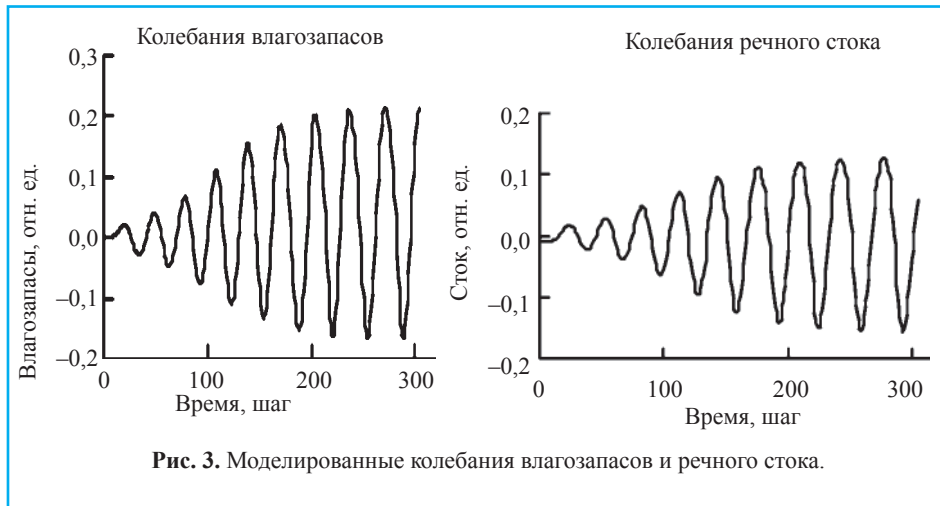
Геометрическим образом установившихся автоколебаний в фазовом пространстве системы служит аттрактор – траектория, расположенная в ограниченной области фазового пространства и притягивающая к себе все близкие траектории. Образом периодических автоколебаний служит траектория, называемая предельным циклом. Размеры предельного цикла определяют амплитуду автоколебаний, время движения изображающей точки по циклу – период автоколебаний, а форма предельного цикла – форму колебаний.

Исследуем решения системы (2) при различных значениях параметра a_{10} , при этом остальные параметры имеют ниже приведенные значения, физическое обоснование которых дано в работе [8]

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{W}}{dt} = a_{10}\tilde{W} - \tilde{Q} - 0,5\tilde{W}^2 - \tilde{W}^3; \\ \frac{d\tilde{Q}}{dt} = 0,5\tilde{W} - 0,4\tilde{Q} - \tilde{W}^2 - 0,5\tilde{W}\tilde{Q} - 4\tilde{W}^2\tilde{Q} + 6\tilde{W}^3. \end{cases} \quad (3)$$

Набор этих коэффициентов показывает, насколько сильно испарение с поверхности водосбора и коэффициент сопротивления движению воды в бассейне зависят от влагозапаса.

Решение рассматриваемой системы для влагозапасов и стока как функции времени представляют собой автоколебательные процессы, при этом сток имеет некоторое запаздывание относительно влагозапасов. Период цикла определяется величиной параметра $a_{10} = -E'(W)$, при изменении которого от 0,40 до 0,98 сохраняются автоколебательные режимы. То есть автоколебания возникают, когда производная испарения отрицательна, испарение уменьшается при возрастании увлажненности. Явление гистерезиса



са испарения теоретически было выведено В.И. Найденовым. Имеются экспериментальные исследования [9] зависимости испаряемости от степени увлажненности территории, показывающие, что в периоды максимального суточного и годового хода температур, когда очень велика роль теплоемкости суши, испаряемость с увлажненных районов заметно меньше, чем с засушливых. Наблюдения также показывают, что испарение с поверхности насыщенной влагой суши на 50 % больше, чем с поверхности рядом расположенного мелкого водоема.

При скорости испарения $E'(W) = -0,39$ аттрактор решения обращается в точку, система стремится в устойчивое состояние. При $E'(W) = -0,4$ период многолетних колебаний стока равняется 28,6 (в относительных единицах). Система очень медленно входит в режим автоколебаний, требуется более 10 000 шагов, чтобы колебания стали устойчивыми. При $E'(W) = -0,5$ система быстро (достаточно рассмотреть первые 200–300 значений) стремится к предельной траектории, амплитуда колебаний как для влагозапасов, так и для стока быстро нарастает (рис. 3), период колебаний остается прежним. Фазовая траектория решения или фазовый портрет системы (3) представлен на рис. 4. При $E'(W) = -0,8$ период возрастает до 36,8 отн. ед, а при $E'(W) = -0,984$ режим автоколебаний прекращается. Данная модель показывает, как скорость испарения может влиять на установление определенного периода колебаний. Может быть, поэтому в многолетних колебаниях стока рек выявлено значительное число разнообразных периодов от 2–3 лет до вековых.

Таким образом, рассматривая только две переменные (влагозапасы почвы и сток), показано, как в системе (3) в зависимости от значений управляющего параметра возникают потеря устойчивости и рождение предельного цикла. При этом возникновение указанных режимов происходит без

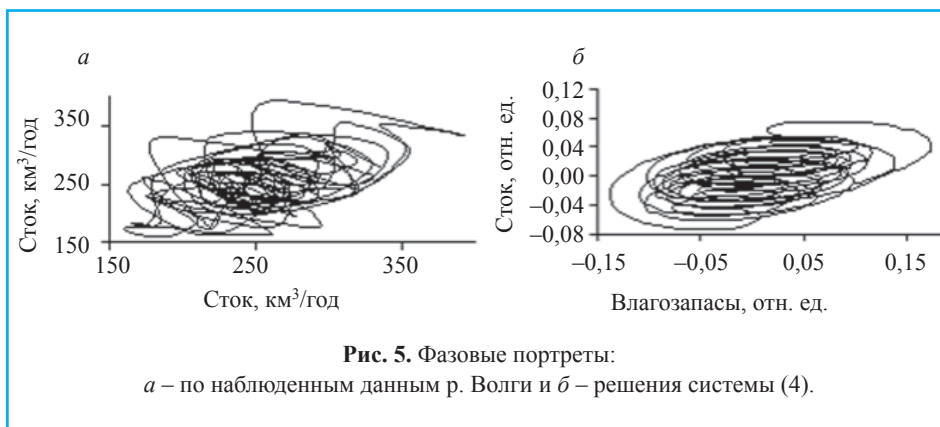


воздействия какой-либо внешней силы. Так как рассматриваемая система является открытой, то помимо осадков, величина которых определяет влагозапасы почвы, на систему могут действовать и другие факторы – важна роль радиационного баланса, колебаний температуры воздуха, воздействия солнечной активности, изменений альбедо суши, транспирации и многого другого. Всю совокупность внешнего воздействия на систему выразим периодической функцией косинуса. Система (3) приобретает вид

$$\begin{cases} \frac{dW}{dt} = \alpha_{10}\tilde{W} - \tilde{Q} - 0,5\tilde{W}^2 - \tilde{W}^3 + 0,1\cos(2t); \\ \frac{dQ}{dt} = 0,5\tilde{W} - 0,4\tilde{Q} - \tilde{W}^2 - 0,5\tilde{W}\tilde{Q} - 4\tilde{W}^2\tilde{Q} + 6\tilde{W}^3. \end{cases} \quad (4)$$

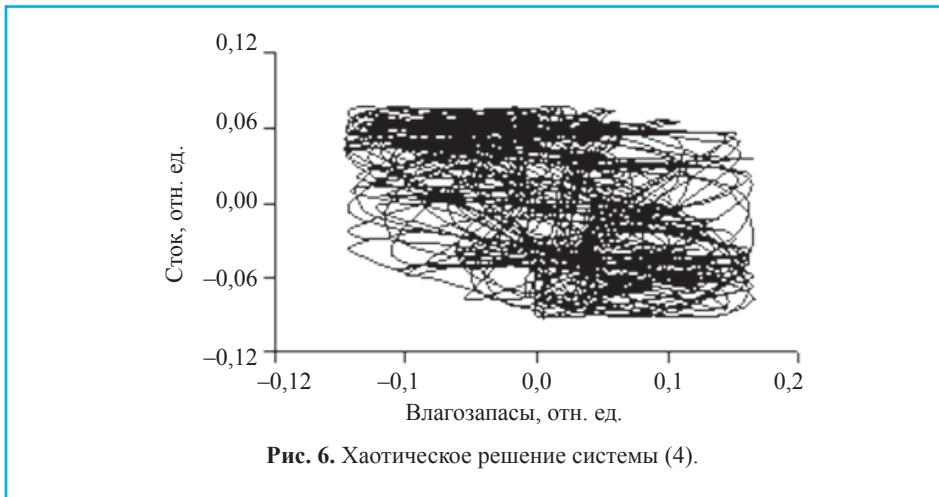
Исследуем поведение системы (4) в зависимости от управляющего параметра α_{10} . Теперь автоколебательные режимы возникают как при отрицательных значениях $\alpha_{10} = E'(W)$, так и положительных. При уменьшении испарения с ростом влагозапасов возникают только устойчивые автоколебания с предельным циклом в виде замкнутой кривой довольно в широких пределах изменения величины $E'(W)$: от 0,40 до 0,98. При положительных значениях $E'(W)$ появляются и устойчивые автоколебания, и странные аттракторы.

Начиная от $E'(W) = 0,0001$ и до $E'(W) = 0,39$; система имеет автоколебательные режимы. При $E'(W) = 0,4$ на фазовом портрете появляется полимодальность, концентрация значений стока около нескольких выборочных значений. Сравнивая полученное решение с фазовым портретом наблюдаемого ряда по стоку р. Волги (рис. 5), можно заключить, что модельный ряд качественно отражает особенности натурного ряда. При выбранных значениях параметров автоколе-



бательное решение имеет период равный 129 отн. ед. Модели, демонстрирующие автоколебательные режимы, позволяют выделить самое существенное качество процесса формирования стока – его цикличность.

В полученном решении системы (4) отражено еще одно характерное качество колебаний речного стока. Ранее в работах с участием авторов [10, 11] показано, что колебания уровня Каспийского моря характеризуются бимодальностью своей плотности распределения вероятностей. Естественно предположить, что все климатические и гидрологические процессы, происходящие в бассейне и оказывающие влияние на формирование стока в море, также должны быть, по крайней мере, бимодальными. В работах С.А. Лобанова [12] с помощью вероятностного анализа кривых обеспеченностей убедительно показана полимодальность речного стока. Исследования не только реки Дальнего Востока, но и других регионов мира: Европы, Азии, Северной Африки. Для рассмотренных рек практически со 100 % надежностью обнаружено реальное существование полимодальности. Однако при попытках формализации динамики речного стока этот факт игнорируется, т. к. используемый математический аппарат не позволяет учитывать его. Тем не менее, некоторые статистические исследования обнаруживают неоднородности гидрологических рядов. Например, в работе [13] проведен детальный анализ данных по стоку Волги. Показано, что ряд наблюдений по речному стоку не является стационарным, а существенно меняет свое среднее многолетнее значение с 240 до 272 км³/год. Другими словами, плотность распределения вероятностей для р. Волги является бимодальной. Представление об этом дает фазовый портрет данных, который является наглядной, качественной оценкой плотности вероятностей и который качественно сравним с моделированной кривой (см. рис. 5). Помимо этого, оценка плотности вероятностей для модельного решения той же протяженности, что и наблюдаемые данные, является бимодальной.



Дальнейшее небольшое изменение управляющего параметра ($E'(W) = 0,44$) приводит к тому, что система теряет упорядоченность и колебания становятся хаотическими. Аттрактор становится странным [6], решение сильно зависит от начальных условий. Предельная траектория не просто замкнутая кривая, а заполняет некоторую область фазового пространства, к которой притягиваются фазовые траектории, не повторяющиеся с течением времени. Предельный цикл преобразуется в странный аттрактор – зону фазового пространства (рис. 6), в котором два положения равновесия становятся неустойчивыми спиральями и сложная хаотическая траектория блуждает между ними. Если следить за одной траекторией в течение долгого времени, то зная, как она выглядит в настоящий момент, мы не можем точно сказать, как она будет выглядеть некоторое время спустя. Единственно о чем можно сказать с уверенностью – этот процесс будет сложным образом зависеть от параметров системы: при некоторых их значениях он может быть периодическим, при других – хаотическим.

Для подтверждения того, что аттрактор получился странным, были подсчитаны его корреляционная (2,28) и информационная размерности (0,984), а также энтропия Колмогорова (3,848). Все эти оценки подтверждают предположение о том, что исследуемая траектория соответствует хаотическому движению.

Если регулярные движения и хаотические рассматривать как порядок и хаос, то сущностью динамического хаоса является их неразрывная связь между собой. Это свойство динамического хаоса позволяет управлять им. Например, в данном случае посредством слабых воздействий на управляющий параметр – скорость испарения, переводить систему из режима хаотических колебаний в требуемый динамический режим, тем самым стабилизируя ее поведение.

Заключение

Новые достижения современной науки, в первую очередь физики, привели к осознанию того факта, что хаотическая динамика присуща практически всем нелинейным физическим системам. Авторам статьи удалось обнаружить явление динамического хаоса в нелинейной системе «влагозапасы – сток». Рассмотренная в работе система нелинейных уравнений является полностью детерминированной, т. е. в ней исключено воздействие случайной внешней силы или случайного изменения какого-либо параметра. Вместе с тем, в этой системе возникает неупорядоченное движение при определенных значениях параметров. Установленное хаотическое движение системы определяется ее собственной сложной динамикой, законами ее развития. Механизм хаотизации рассмотренной системы чрезвычайно сложен, он основан на совместном действии нелинейности и неустойчивости.

Выявленная структура колебаний стока, прежде всего, говорит о невозможности долгосрочного прогноза речного стока. Подтверждения этого заключения имеются и в других работах. Так в конце 2009 г. была защищена диссертация в институте географии им. В.Б. Сочавы Сибирского отделения РАН (г. Иркутск) О.А. Юшкиной [14], в которой показано, что прогнозы для речного стока возможны только на один шаг вперед как для среднегогодового стока, так и для среднемесячного и среднедекадного.

Предложенная детерминированная модель исследована при воздействии внешней силы и без нее. В качестве внешнего воздействия выбрана периодическая функция. Если на систему воздействует периодическая сила, то в классической теории полагают, что и отклик будет периодическим. Однако именно этот постулат оспаривает новая теория хаотических колебаний, что и было показано в статье.

Обнаруженные хаотические режимы, в силу зависимости от начальных условий, легко поддаются корректировке с помощью небольшого влияния на управляющий параметр. В качестве последнего выбрана скорость испарения, находящаяся в сильной зависимости от влагозапасов почвы. Изменяя их посредством мелиоративных средств, можно влиять на колебательные режимы в системе «влагозапасы–сток».

Приложение

Чтобы определить корреляционную размерность для выборочных данных X_1, X_2, \dots, X_n , рассмотрим функцию

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi_m(n, \varepsilon)}{n^2},$$

где $\psi_m(n, \varepsilon)$ – число тех пар (i, j) , $i, j < n$, для которых все компоненты векторов $(X_i, X_{i+1}, \dots, X_{i+m-1})$ и $(X_j, X_{j+1}, \dots, X_{j+m-1})$ отличаются не более, чем на ε при $m = 3, 4, 5$. Согласно [7] в качестве оценки корреляционной размерности используется выражение

$$v_{m,j} = \frac{\ln C_m(\varepsilon_j) - \ln C_m(\varepsilon_{j+1})}{\ln \varepsilon_j - \ln \varepsilon_{j+1}},$$

где $\varepsilon_j = \varphi^j$, $0 < \varphi < 1$.

$$P_i = \frac{n_i}{n}, \quad \sum_{i=1}^m P_i = 1,$$

где n – общее число точек в множестве. Подчеркнем, что $n \neq m$. Оценив вероятности попадания, получаем дополнительную оценку хаоса – информационную энтропию Колмогорова, которая определяется выражением

$$I(\varepsilon) = -\sum_{j=1}^m P_j \log_b P_j,$$

где обычно основание логарифма $b = 2$ [6]. Информационную размерность определим через энтропию

$$d_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log_b \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=1}^m P_j \log_b P_j}{\log_b \varepsilon}. \quad (5)$$

Если вероятности $P_j, j = 1, 2, \dots, m$ одинаковы для всех ячеек, т. е. выполняется соотношение

$$P_j = \frac{n_j}{n} = \frac{1}{m}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

то

$$I(\varepsilon) = -\sum_{j=1}^m P_j \log_b P_j = -m \frac{1}{m} \log_b \frac{1}{m} = \log_b m. \quad (6)$$

Информационная энтропия Колмогорова служит мерой непредсказуемости в системе. В случае, когда все ячейки покрытия равновероятны, т. е.

$P_j = 1/m, j = 1, 2, \dots, m$, величина $I(\varepsilon)$ максимальна. Если величина ячейки в фазовом пространстве $\varepsilon = 1/m$, то, как следует из (5) и (6), $I(\varepsilon) = 1$. Если же все точки сосредоточены в одной ячейке (максимальная предсказуемость), то $I(\varepsilon) = 0$. Действительно, если $P_1 = 1, P_j = 0$ при $j \neq 1$, то $I(\varepsilon) = -\log_b 1 = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кожевникова И.А., Швейкина В.И. Нелинейная динамика колебаний уровня Каспийского моря // Водные ресурсы. 2008. Т. 35. № 3. С. 313–320.
2. Кожевникова И.А., Швейкина В.И. Уточненная стохастическая модель колебаний уровня Каспийского моря // Электронный журнал «Исследовано в России». 2009. № 110. С. 1450–1458. Режим доступа: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/110.pdf>.
3. Найденов В.И., Швейкина В.И. Земные причины водных циклов // Природа. 1997. № 5. С. 19–30.
4. Найденов В.И., Крутова Н.М. Тепловая неустойчивость испарения // Теоретические основы химической технологии. 2003. Т. XXXVII. № 5. С. 23–28.
5. Найденов В.И., Юшманова О.О. О зависимости скорости испарения от глубины водоема // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1996. Т. 32. № 1. С. 125.
6. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 311 с.
7. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. Том I. М.: ФАЗИС. 1998, 489 с.
8. Найденов В.И. Нелинейная динамика поверхностных вод суши. М.: Наука, 2004. 318 с.
9. Тепловой и водный режим территории Армянской ССР и агрометеорологическое обоснование норм и сроков орошения сельскохозяйственных полей в горных условиях // Тр. Закавказского НИГМИ. Л.: Гидрометеиздат, 1974. Вып. 59(65). 257 с.
10. Найденов В.И., Кожевникова И.А. Предскажем ли уровень моря? // Природа. 1994. № 5. С. 4–11.
11. Найденов В.И., Швейкина В.И. Проблемы нелинейной гидрологии // Журнал Российского химического общества им. Д.И. Менделеева. Сер. Новые идеи и гипотезы. 1998. Т. XLII. № 3. С. 102–116.
12. Лобанов С.А. Полиmodalность законов распределения речного стока. Владивосток: ДВГАЭУ, 2004. 103 с.
13. Исмаилов Г.Х., Федоров В.М. Анализ многолетних колебаний годового стока Волги // Водные ресурсы. 2001. Т. 28. № 5. С. 517–525.
14. Юшкина О.А. Анализ и прогноз временной изменчивости речного стока методами нелинейной динамики: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Томский ун-т. Иркутск. 2009. 24 с.

Сведения об авторах:

Кожевникова Ирина Аркадьевна, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ

Швейкина Валентина Ивановна, к. г. н., старший научный сотрудник, Институт водных проблем Российской академии наук, 119333, Москва, ул. Губкина, 3; e-mail: shveik@aqu.laser.ru